

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală – Ilfov

Clasa a VI - a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul 1. Se consideră numerele naturale nenule a, b, c astfel încât

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2025$$

- a) Dacă $b = 2^2 \cdot a$ și $c = 2b$, determinați numerele a, b și c , care verifică egalitatea dată și calculați $(c - b - 4a)^{2025}$
- b) Scrieți numărul 2025^{2025} ca o sumă de trei pătrate perfecte.

a)	Dacă $b=4a$ și $c=8a$, atunci egalitatea dată devine $81a^2=2025$ Se obține $a=5, b=20, c=40$ $(c-b-4a)^{2025}=0$	1p 1p 1p
b)	$2025^{2025} = 2025 \cdot 2025^{2024} = (5^2 + 20^2 + 40^2) \cdot 2025^{2024}$ $= 5^2 \cdot 2025^{1012 \cdot 2} + 20^2 \cdot 2025^{1012 \cdot 2} + 40^2 \cdot 2025^{1012 \cdot 2}$ $= (5 \cdot 2025^{1012})^2 + (20 \cdot 2025^{1012})^2 + (40 \cdot 2025^{1012})^2$	2p 1p 1p

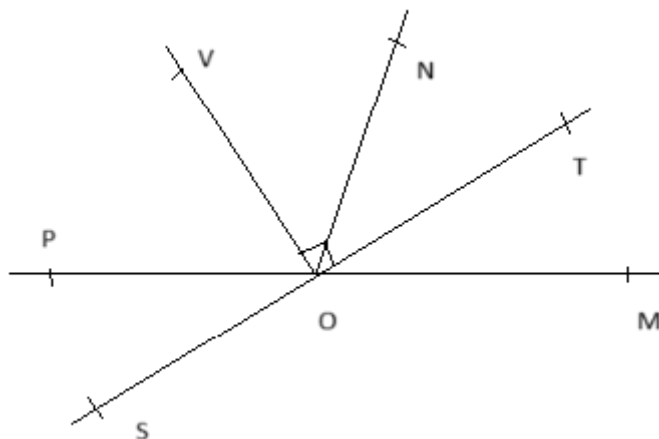
Subiectul 2.

Într-o trupă sunt 61 de dansatori. Arătați că cel puțin șase sunt născuți în aceeași lună și cel puțin doi se sărbătoresc în aceeași săptămână.

Se aplică principiul cutiei și, cum $61:12=5$ rest 1, obținem că dacă ar fi, în cazul cel mai nefavorabil, câte 5 aniversări într-o lună, rămâne o persoană care ar fi a șasea născută în aceeași lună cu alți 5.	2p 2p
Dacă ar fi câte un singur dansator sărbătorit într-o săptămână din cele 52 ale unui an, ar rămâne 9 dansatori și astfel, cel puțin doi s-ar aniversa într-o aceeași săptămână cu un alt coleg.	3p

Subiectul 3.

Unghiurile $\angle MON$ și $\angle NOP$ sunt adiacente suplementare, semidreapta OT este bisectoarea unghiului $\angle MON$ și OV este perpendiculară pe OT . Știind că măsura unghiului $\angle TON$ este egală cu $\frac{2}{9}$ din măsura unghiului $\angle POM$, demonstrați că (OV este bisectoarea unghiului $\angle NOP$ și determinați măsura unghiului format de (ON cu semidreapta opusă lui (OT).



$\angle MON + \angle NOP = 180^\circ$	1p
OT bisectoarea $\angle MON \Rightarrow \angle TOM \equiv \angle NOT$	1p
$OV \perp OT \Rightarrow \angle VOT = 90^\circ$	1p
Din condiția dată se calculează $\angle TON = 40^\circ$, de unde se obține $\angle MON = 80^\circ$	1p
$\angle VON = 50^\circ \Rightarrow \angle VOP = 50^\circ$, de unde rezultă că (OV , interioară unghiului $\angle NOP$, este bisectoarea acestuia	1p
Fie (OS semidreapta opusă lui (OT , cu $\angle SOT = 180^\circ$	1p
Se deduce că $\angle SON = 140^\circ$	1p

Subiectul 4.

Împărțind numerele 131, 248 și 92 la același număr natural $n > 1$, se obține de fiecare dată același rest, număr natural impar. Aflați suma cifrelor numărului n .

(Gazeta matematică, 2024)

$131 = n \cdot c_1 + r$, r impar, $r < n$ (1) $248 = n \cdot c_2 + r$ (2) $92 = n \cdot c_3 + r$ (3)	2p
131 și r impare $\Rightarrow n \cdot c_1$ este număr par, deci cel puțin unul dintre numerele n sau c_1 este par	1p
Dacă n ar fi par, atunci ar rezulta din relațiile (2), (3) că r ar fi par (contradicție cu ipoteza). Deci, n este impar, $n > 1$	1p
Pentru $r=1$ se obțin relațiile $130 = n \cdot c_1$; $247 = n \cdot c_2$; $91 = n \cdot c_3$, cu $(130, 247, 91) = 13$	1p
Deducem că $n=13$	1p
Pentru $r > 1$, se obțin relații contradictorii. Deci rămâne soluția $n=13$	1p